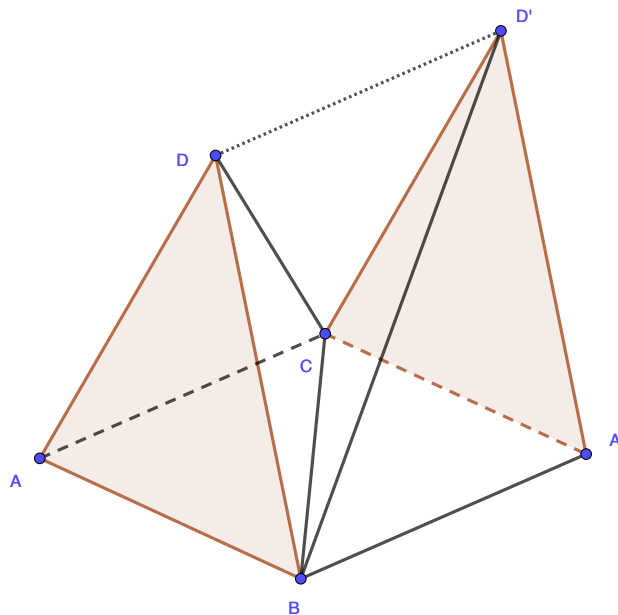


Die Zerlegung eines Prismas in Pyramiden

ein geometrisches Experiment



Dr. Max Leppmeier

Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik

Universität Bayreuth

max.leppmeier@uni-bayreuth.de

Tag der Einreichung: 4.10.2019

Für die Herleitung der Volumenformel einer dreiseitigen Pyramide verwendet man in der Regel das Modell eines oben offenen, prismenförmigen Hohlkörpers, dem man drei Teilpyramiden mit paarweise gleicher Grundfläche und Höhe entnehmen kann. Mit dem Prinzip von Cavalieri begründet man die Volumengleichheit der drei Teilprismen und erreicht so das gewünschte Lernziel. Das Wiedereinfügen der entnommenen Teilpyramiden in den prismenförmigen Hohlkörper gelingt dagegen nicht immer auf Anhieb.

Wir erforschen das Unsymmetrische dieser Thematik und wollen einige mathematische Hintergründe in den Blick nehmen. Das Thema eignet sich für eine experimentelle Ergänzung der raumgeometrischen Lehrplaninhalte, aber auch für einen Einstieg in eine raumgeometrische Begabungsförderung.

Die Zerlegung eines Prismas in Pyramiden – ein geometrisches Experiment

1. Ein ungleichseitiges Prisma – die bekannte Situation

Die Flächenformel für das Dreieck ist vergleichsweise einfach begründbar: Ein beliebiges Dreieck und ein weiteres kongruentes und daher flächengleiches Dreieck lassen sich zu einem Parallelogramm mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe zusammenfügen. Die Dreiecksfläche umfasst also die Hälfte der zugeordneten Parallelogrammfläche (Abbildung 1).

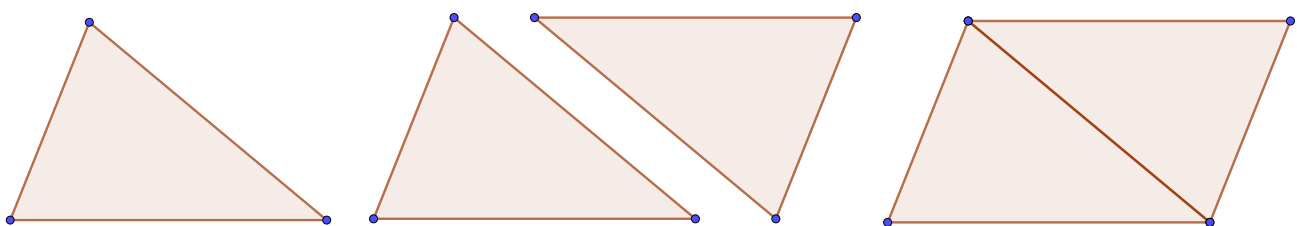


Abbildung 1 Dreiecksfläche und Parallelogrammfläche

Die Volumenformel für die dreiseitige Pyramide ist wesentlich anspruchsvoller. Einiges Probieren zeigt, dass drei kongruente Pyramiden sich in der Regel nicht zu einem Prisma zusammenfügen lassen. Abbildung 2 veranschaulicht einen solchen Versuch mit regulären Tetraedern. Unabhängig davon, wo man das dritte Tetraeder anlegen würde, erhielte man nie ein Prisma.

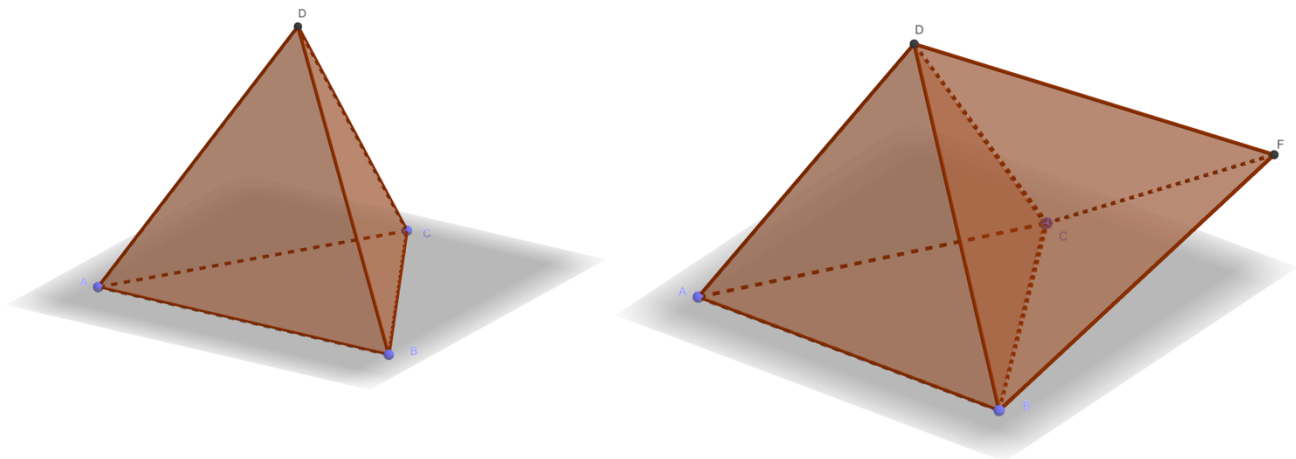


Abbildung 2 Reguläres Tetraeder und Problematik der Ergänzbarkeit zu einem Prisma

Ein Blick in die Geschichte der Mathematik offenbart, dass es bei dieser Thematik auch berühmten Mathematikern ähnlich erging.

Die umgekehrte Frage, ob man ein Prisma in drei kongruente oder wenigstens zerlegungsgleiche¹ Pyramiden zerlegen kann, erlangte als Drittes Hilbertsches Problem eine besondere Bedeutung.

Mit den Worten

„...Seit jener Zeit, richtiger seit den Weihnachtsferien, habe ich einen großen Teil meiner Zeit darauf verwendet, zu versuchen, ob ich nun vollends die Exhaustionsmethode aus der Elementarmathematik dadurch fortschaffen könnte, daß ich den Satz: Pyramiden sind gleich² bei gleicher Grundfläche und Höhe, unabhängig bewiese. Alle diese Versuche sind aber leider vergeblich gewesen; und ist mir nur das dabei merkwürdig erschienen, daß alle, auch die verschiedenst angefangenen immer endlich darauf zurückkommen, zu beweisen: daß 2 dreiseitige Pyramiden gleich groß sind, wenn in ihnen ein Dreieck ABC kongruent und eine Kante in jeder (AD und AE) durch einen Punkt A desselben beiderseits gleich. Einen direkten Beweis dafür zu finden, hat mir aber auf keine Weise gelingen wollen³; so dass ich endlich mich definitiv habe entschließen müssen, die darauf verwendete Zeit verloren zu geben und meinen Lorenz ohne diese gewünschte Verbesserung fertig zu machen, womit ich jetzt beschäftigt bin...“ (Brief Nr. 351 von Gerling an Gauß, 26.6.1845) [1, S. 716]

legte Gerling, ein von Gauss sehr geschätzter Kollege, seine Studienversuche zu den Akten; wir nennen die beschriebene Situation „Gerling-Situation“, sie ist in Abbildung 5 dargestellt.

Gauss machte im Rahmen des zitierten Briefwechsels schon viel früher klar, dass er selbst keinen Lösungsweg sieht:

„Mein Bedauern muß ich ... auf die ... Sätze der Stereometrie beschränken, die annoch⁴ von der Exhaustionsmethode abhängig sind, wie Euclid XII,5⁵. Vielleicht ist auch hier noch manches zu verbessern; in diesem Augenblick habe ich aber nicht Zeit, dem Gegenstande weiteres Nachdenken zu widmen...“ (Brief Nr. 343 von Gauß an Gerling, 17.4.1844) [1, S. 686].

¹ Wir geben im weiteren Verlauf des Kapitels eine Definition für den Begriff der Zerlegungsgleichheit.

² verwendet für „zerlegungsgleich“

³ Heute wissen wir, dass es einen solchen Beweis nicht geben kann [3].

⁴ auch noch

⁵ Euclid XII,5 besagt: „Gleich hohe Pyramiden auf dreieckiger Grundfläche stehen im Verhältnis ihrer Grundflächen“ (zitiert nach opera-platonis.de, Euklid Stoicheia, aufgerufen am 18.09.2019).

Hilbert schärfte die Fragestellung aus und forderte intuitiv einen Unmöglichkeitbeweis (sog. Drittes Hilbertsches Problem):

„Aus dem Gebiete der Grundlagen der Geometrie möchte ich zunächst das folgende Problem nennen.

3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.

Gauss spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daß gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustionsmethode, d. h. in der modernen Ausdrucksweise von dem Stetigkeitsaxiom (oder von dem Archimedischen Axiome) abhängig sind. Gauss nennt besonders den Satz von Euklid, daß dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie ihre Grundflächen verhalten. Nun ist die analoge Aufgabe in der Ebene vollkommen erledigt worden; auch ist es Gerling gelungen, die Volumengleichheit symmetrischer Polyeder durch Zerlegung in congruente Teile zu beweisen. Dennoch erscheint mir der Beweis des eben genannten Satzes von Euklid auf diese Weise im allgemeinen wohl nicht als möglich und es würde sich also um den strengen Unmöglichkeitbeweis handeln. Ein solcher wäre erbracht, sobald es gelingt, zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und von gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in congruente Tetraeder zerlegen lassen und die sich auch durch Hinzufügung congruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in congruente Tetraeder möglich ist.“ [2, S. 266f.]

Dieser Unmöglichkeitbeweis gelang Dehn mit modernen Methoden der Algebra im Jahre 1900 bzw. 1902. Auf der Basis einer Definition für Zerlegungsgleichheit [2]

Definition. Zwei Polyeder P und Q heißen *zerlegungsgleich*, wenn es je eine Zerlegung für P und für Q gibt mit $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ und $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$, so dass P_i kongruent ist zu Q_i für alle $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$.

zeigte er, dass ein reguläres Tetraeder und ein Würfel nicht zerlegungsgleich sein können [3] und gab wenig später einen Beweis für zwei nicht zerlegungsgleiche Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe [4]. Damit war das Rätsel um die Zerlegungsgleichheit volumengleicher Polyeder gelöst.

Im schulischen Kontext für die Volumenformel einer Pyramide wird in der Regel der Themenkomplex um die Zerlegungsgleichheit von Polyedern nicht thematisiert. Man folgt stattdessen dem euklidischen Weg.



Abbildung 3 Ungleichseitiges Prisma (Abdruck mit freundlicher Genehmigung der Arnulf Betzold GmbH)

Im Unterricht vermitteln entsprechende Modelle für ungleichseitige Prismen die Notwendigkeit für das Prinzip von Cavalieri (bzw. Exhaustionsmethode, Archimedisches Axiom).

Wir wollen nun die „unsymmetrische Situation“ – soweit möglich – symmetrisieren, um die Problematik auszuschärfen und zu ergründen. Dies eröffnet Raum für Beobachtungen und ungeahnte Zusammenhänge.

Wir beginnen mit einer Symmetrisierung der Grundfläche des Prismas.

2. Das gleichseitige Prisma – eine harte „Nuß“

Anstelle eines Prismas mit einem beliebigen Dreieck als Grundfläche betrachten wir ein Prisma mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche; die Höhe des Prismas ist dabei so gewählt, dass sie der Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks entspricht. Die Abbildung 4 zeigt ein mit einer Handsäge angefertigtes Modell aus einem Stück Abfallholz.

Aus technischen Gründen wurde das Modell liegend angefertigt. Auf diese Weise ist kein Behältnis notwendig. Außerdem rückt so eine der Schlüsselstellen des Modells in den Fokus, die auch im Zentrum der mathematischen Betrachtung steht: die Schnittkante, die in der Bodenfläche liegt, und eine gemeinsame Kante aller drei Teilpyramiden ist.



Abbildung 4 Holzmodell eines gleichseitigen Prismas

Wir tragen einige elementare Beobachtungen zusammen:

- (1) Die beiden Teilpyramiden, die eine Grundfläche des Prismas (ein gleichseitiges Dreieck) – es erscheint im Modell jeweils als Stirnseite – enthalten, sind kongruent. Sie gehen durch eine Drehung und eine Verschiebung auseinander hervor.

Wir nennen sie *Randpyramiden*.

- (2) Die dritte Pyramide hat als Begrenzungsflächen (sog. Facetten) je zwei gleichschenklige-rechtwinklige Dreiecke, die ihren Ursprung in den Quadraten der Mantelfläche des Prismas haben, und je zwei gleichschenklige Dreiecke, die zugleich die Schnittflächen darstellen. Die beiden gleichschenkligen Dreiecke sind insbesondere nicht gleichseitig, denn sie haben zwei gleich lange Schenkel, die aus den Diagonalen der Quadrate der Mantelfläche des Prismas hervorgehen, und eine Basis, die der Seitenlänge der Grundfläche und somit der Seitenlänge eines solchen Quadrates entspricht.

Wir nennen die dritte Pyramide *mittlere Pyramide*.

(3) Alle drei Pyramiden verbindet eine gemeinsame Kante.

Wir nennen sie *Dreierkante*.

Wir sehen, dass ein erstes Ziel bereits erreicht ist. Die beiden Randpyramiden sind nun kongruent und symmetrisch.

Wenn wir die mittlere Pyramide betrachten, fällt auf, dass sie *nicht kongruent* ist zu den beiden Randpyramiden, denn sie hat kein gleichseitiges Dreieck als Facette. Insbesondere entsteht kein gleichseitiges Dreieck als Schnittfläche.

Weiterhin ist an der Kante, die sich diese Pyramide mit den beiden Randpyramiden teilt, der *Kantenwinkel kleiner* als die beiden anderen kongruenten Kantenwinkel. Wir werden die Kantenwinkel an der Dreierkante im nächsten Abschnitt berechnen.

Wir sehen hier auch den Moment, an dem Gerling seine Betrachtungen zur Zerlegungsgleichheit zweier Pyramiden einstellte. Dazu betrachten wir die mittlere Pyramide und eine Randpyramide etwas näher. (Das Modell wurde gegenüber der Abbildung 4 gedreht, so dass die Dreierkante im Blickfeld liegt.)

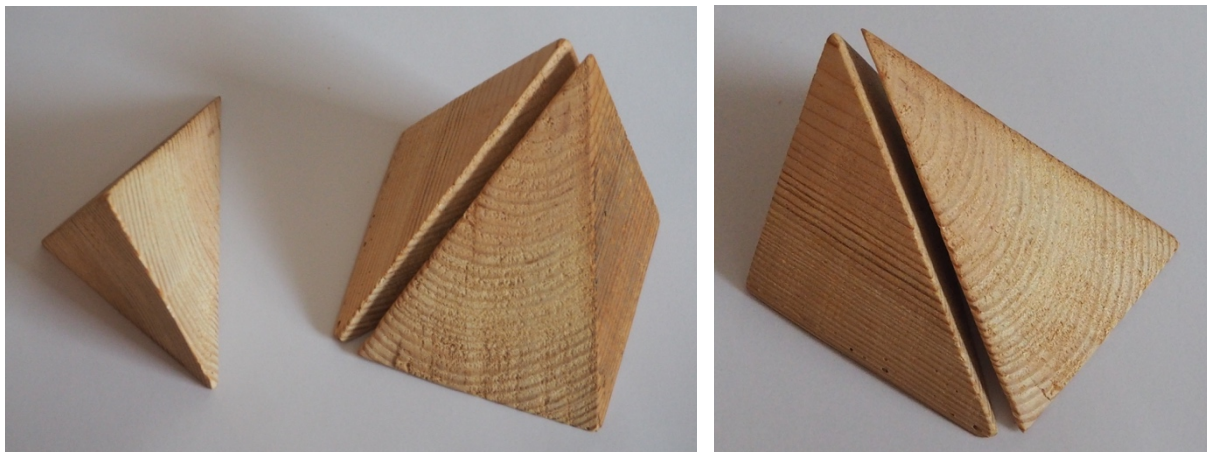


Abbildung 5 Zwei nicht-kongruente Pyramiden mit gleicher Grundfläche und zwei gleichen Kanten („Gerling-Situation“)

Mittlere Pyramide und Randpyramide stehen im Bild auf einem gleichschenkligh-rechtwinkligen Dreieck und haben offensichtlich die gleiche Höhe. Sie teilen sich daneben zwei der drei Kanten, die die Grundflächen mit der Spitze verbinden. Die dritte Kante jedoch ist unterschiedlich. Bei der mittleren Pyramide erkennen wir eine Quadratdiagonale, bei der Randpyramide eine Seite des gleichseitigen Dreiecks. Was ist die Ursache?

Es gibt zwei Möglichkeiten, die gleichschenkligh-rechtwinklige Facette an der gleichschenkligh-rechtwinkligen Grundfläche anzubringen: Einmal so, dass der Höhenfußpunkt der Spitze innerhalb der Grundfläche liegt, und ein andermal so, dass er außerhalb der Grundfläche liegt. Die (geometrische) Natur macht von beiden Möglichkeiten Gebrauch; es entstehen zwei unsymmetrische Teilpyramiden.

Wir ahnen an diesem Modell auch, dass die Andersartigkeit dieser beiden Pyramiden viel ausgeprägter ist und dass der grundsätzlich frei justierbare Kantenwinkel an der ursprünglichen Dreierkante ein Problem für den Nachweis der Zerlegungsgleichheit dieser beiden Teilpyramiden sein kann.

In der Geschichte war es Hilbert, der als Erster mutmaßte, dass dieses Unterfangen wohl nicht gelingen könne, sondern ein Unmöglichkeitsbeweis zu erwarten sei.

Das bedeutet im Modell: Die eine Pyramide kann man nicht durch endlich viele gerade Schnitte so in ein Polyedersortiment zerlegen, dass sich daraus die andere Pyramide zusammensetzen lässt.

Die Lösung nach dem Ergebnis von Dehn stellt sich als relativ harte „Nuss“ heraus.

3. Die Dehn-Invarianten zum gleichseitigen Prisma und seinen Zerlegungstetraedern – die „Nussknacker“

Das Theorem von *Dehn-Sydler* besagt, dass zwei Polyeder genau dann zerlegungsgleich sind⁶, wenn sie in einer besonderen Maßzahl, der Dehn-Invariante, übereinstimmen. Sie lässt sich in elementarer Weise folgendermaßen definieren [5] [2]:

Definition. Gegeben sei ein Polyeder P .

Für jede Kante k bezeichne $l(k)$ die Länge der Kante k und $\alpha(k)$ den Kantenwinkel zu k , d. h. den Winkel zwischen den beiden an k angrenzenden Flächen.

Die Menge aller Kantenwinkel von P einschließlich π sei M_P .

Für eine beliebige, reelle Obermenge M zu M_P sei $V(M)$ die Menge aller Linearkombinationen von Zahlen aus M mit rationalen Koeffizienten und die Funktion f eine beliebige \mathbb{Q} -lineare Funktion $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$, die die Bedingung $f(\pi) = 0$ erfüllt.

Dann heißt der Term $m_f(k) := l(k) \cdot f(\alpha(k))$ *Beitrag der Kante k (bzgl. f)*

und

$$D_f(P) := \sum_{k \in P} m_f(k)$$

Dehn-Invariante von P (bezüglich f).

Wir berechnen die Dehn-Invariante eines gleichseitigen Prismas. Das ist (noch) relativ einfach.

⁶ In der Ebene ist die Situation einfacher: Nach einem Ergebnis, das von Bolyai und Gerwin unabhängig voneinander entdeckt wurde, sind zwei flächengleiche Polygone stets zerlegungsgleich.

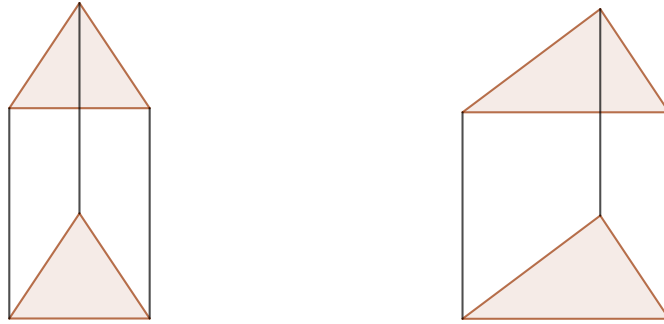


Abbildung 6 Gleichseitiges Prisma - Beliebige Prisma

Die Kantenwinkel betragen 90° bzw. 60° und sind somit rationale Vielfache von 180° . Ohne eine konkrete Funktion f ins Auge zu fassen, erhalten wir aufgrund der \mathbb{Q} -Linearität von f die „Bewertungen“ $f(90^\circ) = 0$ und $f(60^\circ) = 0$. Die Beiträge aller Kanten verschwinden daher. Es gilt:

$$D_f(\text{gleichseitiges Prisma}) = 0$$

Wie man sich leicht überlegen kann, gilt dieser Wert aufgrund der Innensumme eines Dreiecks sogar für jedes beliebige Prisma:

$$D_f(\text{Prisma}) = 0$$

Wir berechnen nun die Dehn-Invarianten der Teilpyramiden. Dazu orientieren wir uns an Abbildung 7.

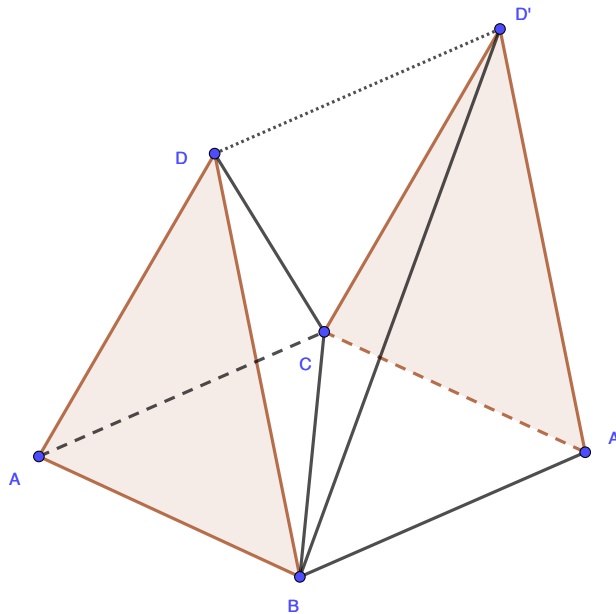


Abbildung 7 Teilpyramiden eines gleichseitigen Prismas

Wir beginnen mit der Randpyramide $ABCD$.

Die Beiträge der Kanten AB , AC und AD können wegen Kantenwinkeln von 60° bzw. 90° vernachlässigt werden. Der Beitrag der Kante BD sei b , der Beitrag der Kante CD sei c , der Beitrag der Kante BC sei a ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

Dies ergibt:

$$D_f(ABCD) = a + b + c$$

Die dazu kongruente Teilpyramide $A'BCD'$ hat aus Symmetriegründen die gleiche Dehn-Invariante, also

$$D_f(A'BCD') = a + b + c.$$

Wir betrachten die *mittlere Pyramide* $BCDD'$.

Der Beitrag der Kante DD' kann wegen des Kantenwinkels 60° vernachlässigt werden.

Der Beitrag der Kante BD ist $-b$, da sich die Kantenwinkel im Tetraeder $ABCD$ und im Tetraeder $BCDD'$ genau zu 90° ergänzen und die \mathbb{Q} -lineare Bewertung der Summe beider Kantenwinkel daher 0 ergibt. Der Beitrag der Kante CD ist entsprechend $-c$. Eine vergleichbare Argumentation gilt für die Kanten BD' und CD' . Der Beitrag der Kante BC ist wegen der \mathbb{Q} -linearen Bewertung der Kantenwinkel $-2a$.

Dies ergibt

$$D_f(BCDD') = -2a - 2b - 2c$$

Wenn nun a nicht verschwindet – dies ist der Fall für einen irrationalen Bruchteil von π – dann ist

$$D_f(BCDD') \neq D_f(ABCD).$$

Dies würde bedeuten, dass nach dem Ergebnis von Dehn-Sydler die beiden Teiltetraeder nicht zerlegungsgleich sein können.

Wir berechnen mit Mitteln der analytischen Geometrie die Kantenwinkel zur Kante BC . Dazu legen wir die wesentlichen Koordinaten fest: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $D\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

Eine Gleichung der Ebene BCD ermitteln wir über den Ansatz

$$ax + by + cz = d.$$

Einsetzen der Punkte führt zu

$$x + y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 1.$$

Ein Normalenvektor der Ebene BCD ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ und hat die Länge $\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$.

Ein Normalenvektor der Ebene ABC ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und hat die Länge 1.

Daraus berechnen wir mit Hilfe des Skalarproduktes der beiden Normalenvektoren den Winkel zwischen den Ebenen ABC und BCD zu

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 67,79^\circ.$$

Dies ist zugleich der *Kantenwinkel der beiden Randpyramiden an der Kante BC*.

Daraus erhalten wir den *Kantenwinkel der mittleren Pyramide an der Kante BC* zu

$$180^\circ - 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 44,42^\circ.$$

Der Anschein, dass beide Winkel irrationale Vielfache von 180° sind, trügt hier nicht. Ein elementarisierte Beweis ist in [6] ausgeführt. Insgesamt ist somit der rechnerische Nachweis erbracht, dass der Beitrag a der Kante BC in beiden Dehn-Invarianten nicht verschwindet. Beide Teiltetraeder sind nicht zerlegungsgleich.

Diese Betrachtung kann man in der ursprünglichen Intention einer größtmöglichen Symmetrisierung der Situation noch ein klein wenig weiter vereinfachen. Mit dem Wissen über die Irrationalität des Tetraederkantenwinkels⁷

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,53^\circ$$

bietet sich eine Streckung des zugrunde liegenden Prismas an, so dass aus dem gleichseitigen Dreieck mit Höhe $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ein gleichschenkliges Dreieck mit gleicher Basis AB und Höhe 1 entsteht. Auf diese Weise werden die Kantenwinkel der beiden Randpyramiden etwas größer, der Kantenwinkel der mittleren Pyramide etwas kleiner. Exakt ergibt dies die Winkel

$$\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,53^\circ \text{ und } 180^\circ - 2 \cdot \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 38,94^\circ.$$

So erhalten wir algebraisch leicht vereinfachte Kantenwinkel, die die wesentliche Eigenschaft der Irrationalität behalten.

Wir fassen zusammen:

Wir sehen, dass wir mit Blick auf die \mathbb{Q} -Linearität für den Beitrag a des Kantenwinkels einer Randpyramide an der Kante BC eine Bewertung $\neq 0$ erwirken können, der insgesamt zu einer nichtverschwindenden Dehn-Invariante für eine Randpyramide

$$D_f(ABCD) \neq 0 \qquad D_f(A'BCD') \neq 0$$

und zu einer ebenfalls nichtverschwindenden Dehn-Invariante der mittleren Pyramide führt:

$$D_f(BCDD') = -2 \cdot D_f(ABCD)$$

Wesentlich für die Anwendung des Theorems von Dehn-Sydler ist hier, dass sich die Dehn-Invariante der mittleren Pyramide von der Dehn-Invariante der beiden Randpyramiden unterscheidet.

In diesem Sinne spiegeln die Dehn-Invarianten das Bewertungsspiel der Kantenwinkel aller drei Zerlegungspyramiden an der gemeinsamen Kante BC wieder. Die „Nuss“ ist geknackt.

Wir erkennen den wesentlichen Fokus: Das Geheimnis der Prismenzerlegung offenbart sich genau in der Kante, die sich alle drei Teilpyramiden teilen. An dieser Stelle werden die Dehn-Invarianten justiert, die über Zerlegbarkeit oder Nichtzerlegbarkeit entscheiden. Auf ihr liegt der Blick des Betrachters in Abbildung 7.

Die nächste Leitfrage liegt nun auf der Hand: Was passiert, wenn alle drei Winkel an der gemeinsamen Dreierkante gleich groß sind?

⁷ Wir verwenden diesen Begriff der Einfachheit halber für „die Irrationalität der Maßzahl des Tetraederkantenwinkels“.

4. Ein „halber“ Würfel als Prisma – und eine besondere Symmetrie!

Wir können diese Frage vollständig elementargeometrisch lösen.

Wir beginnen im ersten Schritt mit der Größe des Kantenwinkels: 60° ist ein rationales Winkelmaß.

Die Lösung führt im nächsten Schritt zu einem Prisma mit einem gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche.



Abbildung 8 Prisma mit gleichschenkelig-rechtwinkligem Dreieck als Grundfläche

Wir erkennen im entstehenden Prisma natürlich auch die Hälfte eines Würfels, halbiert längs einer Schnittebene, die zwei Raumdiagonalen enthält.

Das ist der erste Teil einer verblüffend einfachen Antwort.

Wir betrachten nun die mittlere Pyramide.

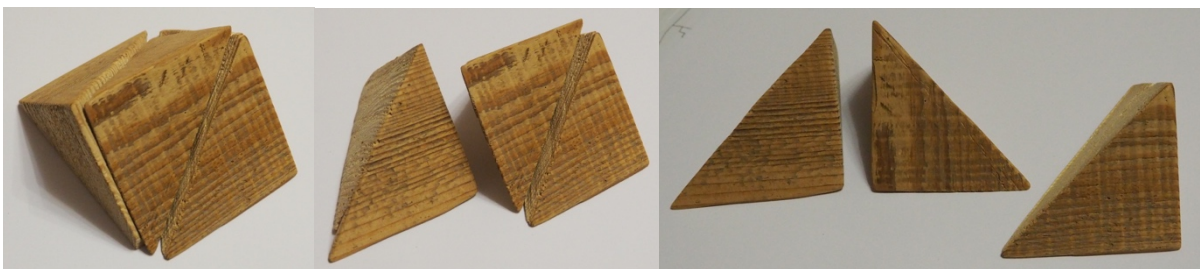


Abbildung 9 Zerlegung eines halben Würfels in drei pieh-nao

Die mittlere Pyramide ist (fast) kongruent zu den beiden Randpyramiden.

Das ist der zweite Teil einer verblüffend einfachen Antwort.

Genauer gilt: Sie ist achsensymmetrisch zu den beiden Randpyramiden und verhält sich daher wie linke Hand und rechte Hand zu den Randpyramiden. In der organischen Chemie ist dieses Phänomen als Händigkeit (Chiralität) bekannt.

In der chinesischen Mathematik heißt diese Teilpyramide, egal ob rechtshändig oder linkshändig, „pieh-nao“. Ein pieh-nao enthält viele Informationen eines Würfels: vier (affine) Punkte, die einen Würfel aufspannen; sechs Kanten, drei davon sind Würfelkanten, zwei weitere Seitendiagonalen und die letzte eine Raumdiagonale, vier Facetten, zwei davon sind Quadrathälften, die anderen beiden sind rechtwinklige Dreiecke mit Seitenlängen 1, $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.



Abbildung 10 Symmetriebrechung durch die Prismenzerlegung

Dieses aus der Physik als Symmetriebrechung (vgl. Co60-Zerfall) bekannte Phänomen steht am Ende eines fortschreitenden Symmetrisierungsprozesses der Prismenzerlegung. Sie ist bei einer maximal möglichen Symmetrie der Zerlegungspyramiden das Überbleibsel der allgemeinen Zerlegungsungleichheit der Zerlegungspyramiden eines Prismas.

Mit Blick auf die Dehn-Invarianten sind die drei Dehn-Invarianten 0; hebt man die Symmetrie auf, entstehen daraus zwei positive Dehn-Invarianten der Randpyramiden und eine negative Dehn-Invariante der mittleren Pyramide, deren Summe weiterhin 0 bleibt (Dehn-Invariante des Prismas).

Dies ist ein hochinteressantes Phänomen. Die Natur des Euklidischen Raumes wehrt sich gegen eine vollständige Symmetrisierung der Zerlegungspyramiden eines Prismas mit einer Symmetriebrechung.

5. Ein Blick zurück

Wir haben gesehen, dass man drei pieh-nao zu einem Prisma ergänzen kann, wenn beide Händigkeiten vertreten sind.

Wie verhält es sich mit drei pieh-nao gleicher Händigkeit? Die Antwort auf diese Frage überlassen wir den Lesern.

Wie verhält es sich mit drei regulären Tetraedern? Der Blick auf die gemeinsame Kante aller drei Tetraeder zeigt, dass hier aufgrund des jeweils identischen Kantenwinkels drei irrationale Tetraederkantenwinkel $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \approx 70,53^\circ$ zusammenstoßen und einen gestreckten Winkel ergeben müssten. Ein Widerspruch! Mit anderen Worten: Ein reguläres Tetraeder kann nicht durch kongruente reguläre Tetraeder allein zu einem Prisma ergänzt werden⁸ (Abbildung 2).

Wir finden dieses Phänomen auch in den unterschiedlichen Dehn-Invarianten wieder. Da $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ ein irrationaler Bruchteil von π ist, führt dies beim regulären Tetraeder zu einer Dehn-Invariante ungleich Null, während die Dehn-Invariante eines Prismas verschwindet.

Warum funktioniert die Ergänzzbarkeit zweier kongruenter Dreiecke zu einem Parallelogramm so leicht? Auch diese Antwort haben die Leser sicher schon im Blick: Gleiche Z-Winkel garantieren parallele Geraden. Elementargeometrisch gleichwertig dazu ist das Parallelenaxiom oder die Winkelsumme im Dreieck.

6. Didaktische Aspekte

Der mathematische Hintergrund der ausgeführten Thematik stellt sich in abstrakter Hinsicht sehr kompakt dar: Eine dreiseitige Pyramide oder ein Tetraeder ist in der affinen Geometrie bekannt als ein 3-Simplex.

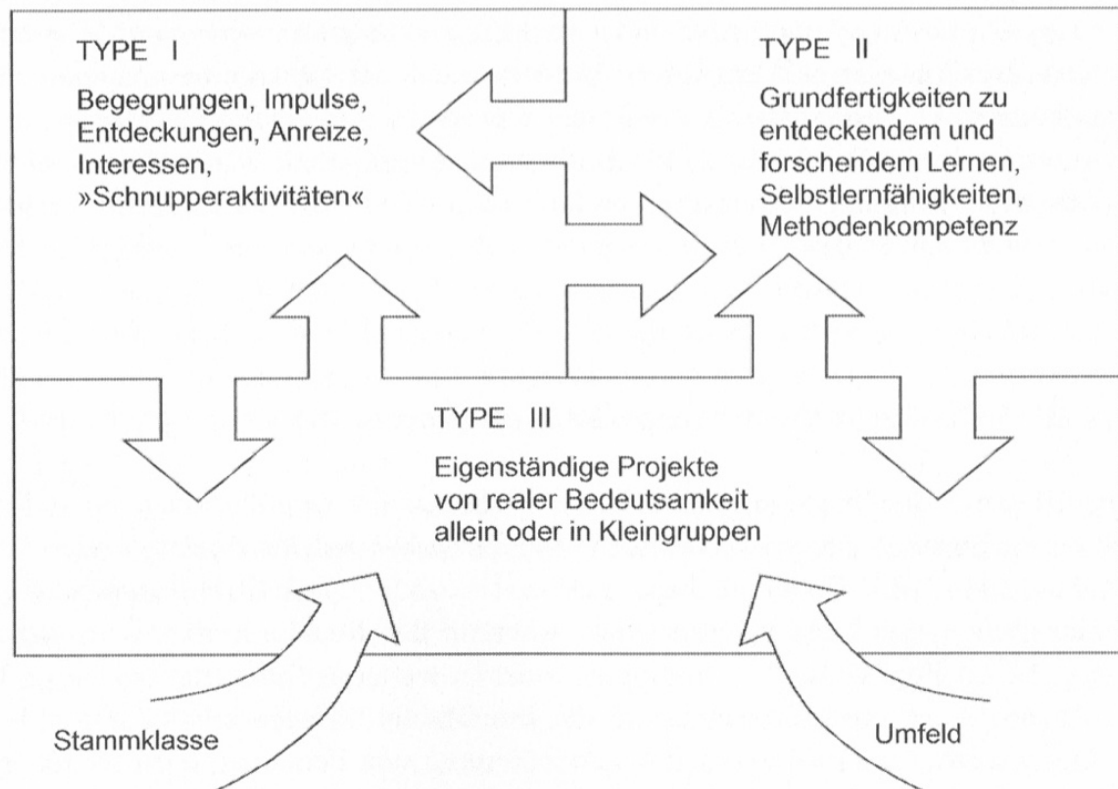
Das Volumen des n-Simplex ist gegeben durch $\frac{|\det(A)|}{n!}$, wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix der das Simplex aufspannenden Vektoren darstellt. Mit Blick auf die Schulgeometrie ist ein 1-Simplex trivial, ein 2-Simplex leicht elementarisierbar und ein 3-Simplex unerwartet anspruchsvoll; 4- und höherdimensionale Simplexe sind anschaulich nicht mehr zugänglich.

Mit Blick auf den affin-geometrischen Hintergrund haben wir also lediglich versucht, den Nenner $\frac{1}{3!}$ zu elementarisieren. Der Faktor $\frac{1}{2}$ ist durch die Zerlegungsmöglichkeit eines Parallelotops in zwei kongruente (schiefe) Prismen nicht wirklich interessant. Daher rückte der Faktor $\frac{1}{3}$ ins Zentrum der Betrachtungen.

Die vorgestellte Thematik ist dazu geeignet, in unterschiedlicher Weise eine personorientierte Begabungsförderung in der Auffassung von Weigand et.al. zu initiieren [7].

Den Rahmen dafür kann der in Enrichment-Ansatz nach dem Triad-Modell von Renzulli und Reiss (Abbildung 11) darstellen und so „beides ermöglichen: ‚Highend learning‘ für Hochbegabte ebenso wie ein integratives Modell breiter Begabungsförderung aller im Sinn von ‚a rising tide lifts all the ships‘“ [8, S. 253].

⁸ Eine Ergänzung gelingt zum Beispiel durch ein oktaedrisches Tetraeder [2].



*Abbildung 11 Triad-Modell, entnommen aus [8, S. 259] resp. from [9, p. 50]
(Abdruck mit freundlicher Genehmigung des BELTZ-Verlages,
Copyright 2014 by Prufrock Press. Reprinted with permission.)*

Detailliertere Unterrichtskonzepte zum Dritten Hilbertschen Problem bzw. zum Tetraederkantenwinkel finden sich in [2] [6]. In [2] ist der Ansatz einer personorientierten mathematischen Begabungsförderung auch in den Kontext des dialogischen Lernens nach Gallin und Ruf, des genetisch-sokratisch-exemplarischen Weges nach Wagenschein und des Elementarisierens eingebettet.

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Albrecht Beutelspacher und Herrn Prof. Dr. Volker Ulm danke ich für wertvolle Hinweise und Anregungen. Herrn Martin Schlagbauer danke für die Überlassung des Abfallholzes.

7. Literatur

- [1] C. F. Gauss und C. L. Gerling, Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling, C. Schaefer, Hrsg., Berlin: Elsner, 1927.
- [2] D. Hilbert, „Mathematische Probleme,“ *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900*, Bd. 3, pp. 253-297, 1900.
- [3] M. Leppmeier, Mathematische Begabungsförderung am Gymnasium, Wiesbaden: Springer, 2019.
- [4] M. Dehn, „Über raumgleiche Polyeder,“ *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse aus dem Jahre 1900*, Bd. 3, pp. 345-354, 1900.
- [5] M. Dehn, „Über den Rauminhalt,“ *Mathematische Annalen*, Bd. 55, pp. 465-478, 1902.
- [6] M. Aigner und G. M. Ziegler, Proofs from the BOOK, Berlin: Springer, 2000.
- [7] M. Leppmeier, Der Tetraederkantenwinkel $\arccos(1/3)$ - eine Elementarisierung am Einheitskreis mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Dr. h.c. Albrecht Beutelspacher, Beau Bassin: Lehrbuchverlag, 2019.
inhaltsgleich mit: Mathematikdidaktik im Kontext (Hrsg. V. Ulm), Bd. 3, EPuB Bayreuth 2019
- [8] G. Weigand, A. Hackl, V. Müller-Oppliger und G. Schmid, Personorientierte Begabungsförderung, Weinheim: Beltz, 2014.
- [9] S. Renzulli und S. Reis, The Schoolwide Enrichment Model: A How-to Guide for Talent Development, 3. Auflage, Waco, TX: Prufrock Press, 2014.
- [10] A. Beutelspacher, Wie man in eine Seifenblase schlüpft - DIE WELT DER MATHEMATIK IN 100 EXPERIMENTEN, München: C.H. Beck, 2015.